

3.10.2. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi

Avvalo, fazoda nokomplanar vektorlar uchligining joylashish tartibiga bog'liq bo'lgan quyidagi tushunchani keltiramiz.

3.10.2-ta'rif. Agar fazoda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tartibida nokomplanar vektorlar sistemasi berilgan bo'lib, ularning boshi umumiy nuqtaga keltirilgach, uchinchi bo'lgan $\vec{c}$ vektorning uchidan uning yo'nalishiga qarama-qarshi qaralganda birinchisi $\vec{a}$ vektordan ikkinchisi $\vec{b}$ vektorga tomon yoyiq burchakdan kichik burilish burchagining yo'nalishi soat ko'rsatkichi harakati yo'nalishiga qarama-qarshi (ya'ni musbat) bo'lsa, bu tartibdagi vektorlar uchligini o'ng uchlik, aks holda chap uchlik deb ataladi.

Vektorlarning tartiblangan uchligi quyidagi xossalarga ega bo'lishini ko'rsatish osondir:

1⁰. Vektorlarning tartiblangan uchligida ixtiyoriy ikki vektorlarning o'rinlari (tartiblari) o'zaro almashtirilsa, uchlik o'z nomini o'zgartiradi;

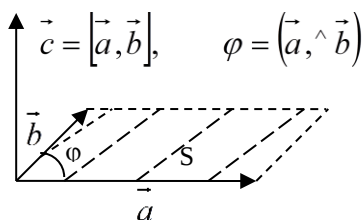
2⁰. Tartiblangan uchlik vektorlarining o'rinlari (tartiblari) doiraviy shaklda almashtirilsa, uchlik o'z nomini o'zgartirmaydi, ya'ni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$; $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ lar bir xil nomli uchliklar bo'ladi.

Eslatma. Agar fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lib, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlar o'ng uchlikni tashkil qilsa, uni o'ng sistema, chap uchlikni tashkil qilsa, chap sistema deb yuritiladi. Biz asosan o'ng sistema bilan ishlaymiz.

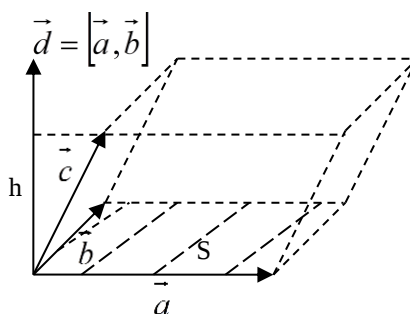
3.10.3-ta'rif. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb, quyidagi shartlar bilan aniqlanuvchi va $[\vec{a}, \vec{b}]$ (yoki $\vec{a} \times \vec{b}$) kabi belgilanuvchi $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \varphi|$, ($\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$);
- 2) $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0$;
- 3) $|\vec{c}| \neq 0$ bo'lganda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o'ng uchlikni tashkil etadi.

Bu ta'rif bilan kiritilgan $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$ vektor ko'paytmaning geometrik ma'nosini $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lmagan hol uchun 3.10.3-rasmda ko'rish mumkin.



3.10.3-rasm.



3.10.4-rasm.

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi uchun quyidagi xossalar o'rinlidir (mustaqil ishonch hosil qiling):

- 1⁰. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$;
- 2⁰. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;
- 3⁰. $[\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2, \vec{b}] = [\vec{a}_1, \vec{b}] \pm [\vec{a}_2, \vec{b}]$, $[\vec{a}, \vec{b}_1 \pm \vec{b}_2] = [\vec{a}, \vec{b}_1] \pm [\vec{a}, \vec{b}_2]$;

$$4^0. \quad [\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}] = (\lambda \mu) [\vec{a}, \vec{b}], \quad (\lambda \mu \in R).$$

Keltirilgan 1^0 xossadan ko‘rinadiki, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinearlik sharti sifatida $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ bo‘lishini olish mumkindir.

$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ vektorlar koordinatalari bilan fazoda Dekart bazisida berilgan bo‘lsin. U vaqtda,

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= [x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}] = \\ &= (x_1 x_2) [\vec{i}, \vec{i}] + (x_1 y_2) [\vec{i}, \vec{j}] + (x_1 z_2) [\vec{i}, \vec{k}] + \\ &+ (y_1 x_2) [\vec{j}, \vec{i}] + (y_1 y_2) [\vec{j}, \vec{j}] + (y_1 z_2) [\vec{j}, \vec{k}] + \\ &+ (z_1 x_2) [\vec{k}, \vec{i}] + (z_1 y_2) [\vec{k}, \vec{j}] + (z_1 z_2) [\vec{k}, \vec{k}]. \end{aligned}$$

3.10.2-rasmdan hamda $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{k} \perp \vec{i}, |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ ekanligidan ko‘rinadiki, $[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}$, $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$, $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$, $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$ o‘rinlidir. Demak, $[\vec{a}, \vec{b}] = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$ ni va, nihoyat, oxirigidan

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (3.10.4)$$

ni olamiz. (3.10.4) vektorlarning vektor ko‘paytmasi formulasining koordinatalar shaklidir.

Vektor ko‘paytmaning ta’rifidan uning moduli son qiymati jihatidan berilgan (ko‘paytuvchi) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga tengdir (3.10.3-rasmga qarang):

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Masalan, uchlari $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchuburchak yuzini hisoblaylik. ABC uchburchakning yuzi $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzining yarmiga tengligi ravshandir:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

$\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarni hisoblaylik:

$$\overrightarrow{AB} = \{3-1; 0-2; -3-0\} = \{2; -2; -3\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{5-1; 2-2; 6-0\} = \{4; 0; 6\}.$$

Endi, hisoblangan bu vektorlarning vektor ko‘paytmasini topamiz. (3.10.4) formulaga ko‘ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} = 4(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}). \end{aligned}$$

Demak,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 4 \left| -3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} \right| = 2\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \\ = 2\sqrt{9 + 36 + 4} = 2\sqrt{49} = 14.$$

3.10.3. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi

3.10.4-ta'rif. Tartiblangan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchligining aralash ko'paytmasi deb, $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ ga aytiladi.

Bu ta'rifdan, agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchligi komplanar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga tengligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $d = [\vec{a}, \vec{b}]$ deb belgilasak, vektor ko'paytma ta'rifiga ko'ra $(\vec{d}, \vec{a}) = (\vec{d}, \vec{b}) = 0$ bo'ladi.

Undan tashqari, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar ekanligidan ular bitta tekislikda yotishi sababli (vektorlar umumiy boshga keltirilgan degan faraz asosida) $(\vec{d}, \vec{c}) = 0$ kelib chiqadi.

Endi, vektorlarning $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uchligi nokomplanar deb faraz qilaylik. U vaqtda, 3.10.4-rasmdan

$$h = \pi p_{\vec{a}} \vec{c}$$

bo'lib, $|h|$ asosi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammdan iborat bo'lgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning balandligidir. Uning hajmi

$$V = S|h|$$

bo'lib, $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ ekanligidan

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}]| \cdot |h| = |[\vec{a}, \vec{b}]| |h| = \\ = |\vec{d}| |\pi p_{\vec{a}} \vec{c}| = |(\vec{d}, \vec{c})| = |([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})|$$

ni olamiz. Bundan

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \pm V$$

ga kelamiz. Demak, nokomplanar bo'lgan tartiblangan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchligining aralash ko'paytmasining absolut qiymati son qiymati jihatidan bu vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmiga teng bo'lar ekan. Oxirgi tenglik o'ng tomondagi «+» ishora tartiblangan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasi o'ng uchlikni, «-» esa chap uchlikni tashkil qilgan holga mos kelishiga ishonch hosil qilish qiyin emas (mustaqil bajaring).

Bu uchta vektorlar aralash ko'paytmasining geometrik ma'nosidir.

Uch vektorlar aralash ko'paytmasi uchun quyidagi xossalar o'rinalidir:

1⁰. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = 0$ bo'ladi va, aksincha, aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lgan vektorlar uchligi komplanardir;

2⁰. Aralash ko'paytmada vektor ko'paytuvchilardan ixtiyoriy ikkitasining o'rinlari almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshisiga o'zgaradi, masalan, $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = -([\vec{c}, \vec{b}], \vec{a})$;

3⁰. Aralash ko'paytmada vektor ko'paytuvchilarning o'rinlari doiraviy shaklda almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}) = ([\vec{c}, \vec{a}], \vec{b});$$

4⁰. Aralash ko'paytmada vektor ko'paytirish va skalyar ko'paytirish belgilarining o'rinlari almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$.

Aralash ko'paytmaning yuqorida keltirilgan 4⁰ xossasi asosida uni vektor va skalyar ko'paytirish belgilarisiz yozish imkoniyati tug'iladi, ya'ni

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \vec{a} \vec{b} \vec{c}$$

Bundan buyon shunday belgilashdan foydalanamiz.

Yuqorida keltirilgan 1⁰ xossaga ko'ra, berilgan uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning komplanarlik sharti sifatida $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$ ni qabul qilish mumkindir.

Agar $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ vektorlar fazoda Dekart bazisida berilgan bo'lsa, (3.10.4) dan

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

ni va (3.10.1) dan

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

ni olamiz va, nihoyat,

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (3.10.5)$$

ga kelimiz. (3.10.5) vektorlarning aralash ko'paytmasi formulasining koordinatalar shaklidir.

Bu o'rinda Dekart bazasida berilgan $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ vektorlarning komplanarlik sharti

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

ekanligini aytamiz.

3.11. n o'lchovli vektorlar fazosi tushunchasi

Yuqorida vektor sonlar o'qida uning koordinatasi deb ataluvchi bitta x son; koordinatalar tekisligida tartiblangan $(x; y)$ sonlarning jufti va koordinatalar fazosida esa $(x; y; z)$ sonlarning tartiblashgan uchligi bilan aniqlanishini (berilishini) ko'rdik. Shu sababli, ularni mos ravishda bir, ikki va uch o'lchovli vektorlar deb ataladi. Xuddi shunga o'xshash, agar n ta $x_i (i = \overline{1; n})$ sonlarning tartiblangan sistemasi (to'plami) bilan aniqlanadigan $\vec{a}$ vektor tushunchasi kiritlsa, uni n o'lchovli, mazkur sonlar sistemasini esa uning koordinatalari (komponentalari) deyilib, $\vec{a}(x_1; x_2; \dots; x_n)$ yoki $\vec{a} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ yoki $\vec{a} = [x_1; x_2; \dots; x_n]$ yoki $\vec{a} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ kabi yoziladi.

n o'lovli vektorlar uchun aniqlangan quyidagi amallarni keltiramiz ($\vec{a}_j(x_1^{(j)}; x_2^{(j)}; \dots; x_n^{(j)})$ deb faraz qilamiz):

$$1) \quad \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \Leftrightarrow \{x_i^{(1)} = x_i^{(2)}, i = \overline{1; n}\};$$

$$2) \quad \vec{a}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \{x_i^{(1)} = 0, i = \overline{1; n}\};$$

$$3) \quad |\vec{a}_1| \quad \text{kabi belgilanuvchi } \vec{a}_1 \text{ vektorning moduli deb,}$$

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(1)})^2}$$

ni qabul qilinadi;

4) *moduli 1 ga teng bo'lgan vektorni birlik vektor (ort) deb ataladi;*

5) *berilgan $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarning yig'indisi deb, koordinatalari ularning mos koordinatalarining yig'indisidan iborat bo'lgan $\vec{a}_3$ vektorga aytiladi, ya'ni*

$$x_i^{(3)} = x_i^{(1)} + x_i^{(2)}, i = \overline{1; n},$$

va $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3$ kabi yoziladi;

xossalari:

$$1^0. \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$2^0. \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a},$$

$$3^0. \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$$

4⁰. agar $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar qarama-qarshi vektorlar deb ataladi va $\vec{a} = -\vec{b}$ ($\vec{b} = -\vec{a}$) kabi yoziladi hamda $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektorni $-\vec{a}$ kabi belgilanadi;

6) *berilgan $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarning ayirmasi deb, shunday $\vec{a}_3$ vektorga aytiladiki, uning $\vec{a}_2$ bilan yig'indisi $\vec{a}_1$ dan iborat bo'ladi va $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_3$ kabi yoziladi demak, bu ta'rif bo'yicha*

$$\vec{a}_3 + \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \Leftrightarrow \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_3$$

ekanligini va vektorlarni qo'shish ta'rif yordamida

$$x_i^{(3)} = x_i^{(1)} - x_i^{(2)}, i = \overline{1; n}$$

formulani olamiz;

7) *berilgan $\vec{a}_1$ vektorning berilgan λ songa ko'paytmasi deb, shunday $\vec{a}_2$ vektorga aytiladiki, uning har bir koordinatasi $\vec{a}_1$ ning mos koordinatasining λ songa ko'paytmasidan iborat bo'ladi va $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1 = \vec{a}_1 \lambda$ kabi yoziladi, demak,*

$$x_i^{(2)} = \lambda x_i^{(1)}, i = \overline{1; n}$$

formula o'rinnidir; vektorni songa ko'paytirish amali quyidagi xossalarga egadir ($\lambda, \mu \in R$):

$$1^0. \quad 0\vec{a} = \vec{0},$$

$$2^0. \quad \lambda \vec{0} = \vec{0},$$

$$3^0. \quad 1\vec{a} = \vec{a},$$

$$4^0. \quad (-1)\vec{a} = -\vec{a},$$

$$5^0. \quad \lambda (\vec{a} \pm \vec{b}) = \lambda \vec{a} \pm \lambda \vec{b},$$

$$\begin{aligned} 6^0. \quad & (\lambda \pm \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} \pm \mu \vec{a}, \\ 7^0. \quad & \lambda (\mu \vec{a}) = \mu (\lambda \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}, \\ 8^0. \quad & |\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|; \end{aligned}$$

8) berilgan $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi va $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ yoki $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ kabi belgilanadi, demak,

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \sum_{i=1}^n (x_i^{(1)} \cdot x_i^{(2)});$$

xossalari ($\lambda, \mu \in R$):

$$\begin{aligned} 1^0. \quad & (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}); \\ 2^0. \quad & (\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}) = (\lambda \mu) (\vec{a}, \vec{b}); \\ 3^0. \quad & (\vec{a} \pm \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) \pm (\vec{b}, \vec{c}); \\ 4^0. \quad & (\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 - \text{vektorning skalyar kvadrati modulining kvadratiga tengdir}; \\ 5^0. \quad & (\vec{a}, \vec{0}) = 0; \\ 6^0. \quad & \text{agar } (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \text{ bo'lsa, bu vektorlar ortogonal deb ataladi.} \end{aligned}$$

Eslatma. Bu keltirilgan amallar $n = \overline{1;3}$ bo'lgan hollarda oldingi ko'rilganlar bilan ustma-ust tushishiga ishonch hosil qilish qiyinchilik tug'dirmaydi.

Koordinatalari (komponentlari) haqiqiy bo'lgan barcha n o'lchovli vektorlar to'plami n o'lchovli vektorlar fazosi deb ataladi.

Agar n o'lchovli vektorlar fazosining $\vec{e}_i (\delta_{i1}; \delta_{i2}; \dots; \delta_{in})$ ($i = \overline{1;n}$) vektorlari sistemasini qarasak, bu yerda δ_{ij} - Kroneker belgisi, ularning har biri birlik vektordan (ortdan) iborat ekanligi ravshandir. Shu sababli, ularni n o'lchovli vektorlar fazosining ortlari sistemasi deb yuritiladi.

Quyidagi tasdiq o'rinnidir.

3.11.1-teorema. $\vec{a}_i (a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{in})$ ($i = \overline{1;n}, n \in N$) vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lishi uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.11.1)$$

determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Yetarliligi. Aytaylik, $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1;n}, n \in N$) vektorlar sistemasi uchun (3.11.1) determinant noldan farqli ($\Delta \neq 0$) bo'lsin. Ma'lumki, bu vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lishi uchun

$$\sum_{i=1}^n c_i \vec{a}_i = \vec{0} \quad (3.11.2)$$

tenglik $c_i = 0$ ($i = \overline{1;n}$) bo'lgandagina bajarilishi kerakdir. (3.11.2) ni koordinatalar shaklida yozib,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} c_i = 0, \quad j = \overline{1; n} \quad (3.11.3)$$

n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalarning bir jinsli sistemasiga kelamiz. (3.11.3) sistemaning determinanti (3.11.1) ga transponirlangan determinantdan iborat bo'lib, u noldan farqli ekanligidan yagona $c_i = 0$ ($i = \overline{1; n}$) yechimga egadir (2-bobga qarang). Demak, vektorlar sistemasi chiziqli erklidir.

Zaruriyligi. Endi, $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1; n}$, $n \in N$) vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lsin deb faraz qilaylik. U vaqtda, (3.11.2) tenglik $c_i = 0$ ($i = \overline{1; n}$) bo'lgandagina o'rinli va u (3.11.3) bir jinsli sistemaning yagona yechimidan iborat bo'lib, $\Delta \neq 0$ bo'lishi kelib chiqadi (2-bobga qarang).

3.11.2-teorema. $\vec{a}_i$ ($a_{i1}; a_{i2}; \dots; a_{in}$) ($i = \overline{1; n}$, $n \in N$) vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lsa, u vaqtda, ixtiyoriy n o'lchovli vektorni yagona tarzda ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Isbot. Teorema sharti bajarilsin va $\vec{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)$ ixtiyoriy n o'lchovli vektor berilgan bo'lsin. Agar $\vec{b}$ vektorning berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha chiziqli kombinatsiyasini

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i$$

deb faraz qilsak, x_i ($i = \overline{1; n}$) larga nisbatan quyidagi sistemaga kelamiz:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j, \quad j = \overline{1; n}. \quad (3.1.4)$$

Uning determinanti, $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1; n}$, $n \in N$) vektorlar sistemasi chiziqli erkli ekanligidan, 3.11.1-teoremaga asosan, noldan farqli bo'lib, yagona yechimga egadir (2-bobga qarang). Teorema isbotlandi.

Isbotlangan 3.11.2-teoremadan ko'ramizki, agar n o'lchovli vektorlar fazosida (to'plamida) chiziqli erkli bo'lgan n ta vektorlar berilgan bo'lsa, n o'lchovli ixtiyoriy vektorni shu berilgan vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida yagona tarzda ifodalash mumkin bo'lib, berilgan bunday *chiziqli erkli n ta vektorlarning sistemasini n o'lchovli vektorlar fazosining (to'plamining) bazisi* deb ataladi. 3.11.1-teoremaga asosan esa berilgan n ta vektorlar n o'lchovli vektorlar fazosida bazisni tashkil etishi uchun ularning koordinatalari vositasida tuzilgan (3.11.1) determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1; n}$, $n \in N$) vektorlar sistemasi n o'lchovli vektorlar fazosida bazisni tashkil etib,

$$i \neq j \Rightarrow (\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0 \quad (i, j = \overline{1; n})$$

shartni qanoatlantirsa, ya'ni bazisning vektorlari juft-juft ortogonal bo'lsa, uni *ortogonal bazis* deb; bazis vektorlarning barchasi birlik vektorlardan (ortlardan) iborat bo'lsa, uni *normal bazis* deb; ham ortogonal ham normal bo'lgan bazisni esa *ortonormal bazis* deb ataladi.

Bu o'rinda, agar $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1; n}$, $n \in N$) ortonormal bazisdan iborat bo'lsa,

$$(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = \overline{1; n})$$

bo'lishini aytamiz (bu yerda δ_{ij} - Kroneker belgisi).

Agar $\vec{e}_i(\delta_{i1}; \delta_{i2}; \dots; \delta_{in})$ ($i = \overline{1; n}, n \in N$) n o'lchovli vektorlar fazosining ortlari sistemasini olsak, u chiziqli erkli bo'lib, bazisni tashkil etishi aniqdir; bazis to'g'risida maxsus eslatilmagan holda n o'lchovli vektorlar fazosining bazisi deb xuddi shu sistemani tushunamiz. Undan tashqari, bu sistema ortonormal bazisdan iborat ekanligiga ishonch hosil qilish osondir. Masalan, uch o'lchovli vektorlar fazosini olsak, unda $\vec{e}_1(1;0;0), \vec{e}_2(0;1;0), \vec{e}_3(0;0;1)$ sistema ortonormal bazisdan iborat bo'lib, uni oldinroq $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ kabi belgilanishini aytgan edik.

Misol. $\vec{a}_1(1;-1;0;1), \vec{a}_2(1;1;0;-1), \vec{a}_3(1;1;0;1), \vec{a}_4(0;1;-1;0)$ berilgan. Ularning 4 o'lchovli vektorlar fazosida bazis tashkil etishini tekshiring va ijobiy javob olingan taqdirda $\vec{b}(2;2;4;2)$ vektorni shu bazisdagi koordinatalarini aniqlang.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 = 4 \neq 0.$$

$\Delta \neq 0$ ekanligidan, 3.11.1-teoremaga asosan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ vektorlar sistemasi 4 o'lchovli fazoda bazisni tashkil qiladi.

Endi, $\vec{b}(2;2;4;2)$ vektorning bu bazisdagi koordinatalarini $\vec{b}(x_1; x_2; x_3; x_4)$ deb belgilab, (3.11.4) sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Bu sistemaning determinanti yuqorida hisoblangan determinantga transponirlanganligidan u ham 4 ga tengdir. Yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 6 - 2 - 6 + 2 = -8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 2 - 2 + 2 + 6 = 16,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4(1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1) = -16.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1 = \frac{-8}{4} = -2, x_2 = \frac{0}{4} = 0, x_3 = \frac{16}{4} = 4, x_4 = \frac{-16}{4} = -4.$$

Demak, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ bazisda $\vec{b}(-2; 0; 4; -4)$.

3-bobga doir mashqlar

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ to'g'ri burchakli parallelepipedda berilgan $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ vektorlarga ko'ra
a) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$; b) $\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; c) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ vektorlarni yasang.
2. Ixtiyoriy ABC uchburchakda E va F nuqtalar mos ravishda AB va AC tomonlarining o'rtasi bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorlarni $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$ vektorlar orqali ifodalang.
Javob: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = 2(\vec{b} - 2\vec{a})$, $\overrightarrow{AC} = 2(\vec{b} - \vec{a})$.
3. Tekislikda $A(2;3)$, $B(-3;3)$, $C(-3;0)$ nuqtalarga koordinatalar boshidan $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ kuchlar qo'yilgan. Ularning teng ta'sir etuvchisi $\overrightarrow{ON}$ ni yasang va uning koordinata o'qlardagi proyeksiyalarini hamda modulini toping.
Javob: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $np_{ox} \overrightarrow{ON} = -3$; $np_{oy} \overrightarrow{ON} = 6$ $|\overrightarrow{ON}| = 3\sqrt{50}$
4. To'rtburchak uchlarining koordinatalari berilgan:
 $A(4;0;8)$, $B(5;2;6)$, $C(3;1;4)$, $D(2;-1;6)$ Shu to'rtburchakning kvadrat ekanligini ko'rsating.
5. $\overrightarrow{AB}$ vektorning boshi $A(-1;2;4)$ va uni teng ikkiga bo'luvchi nuqta $C(2;0;2)$ berilgan bo'lsa, B uchining koordinatalarini toping.
Javob: $B(8;-4;-2)$.
6. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.
Javob: 0.
7. $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ va $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ vektorlar berilgan. m ning qanday qiymatlarida bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi?
Javob: 4.
8. $\vec{a} = \{2;3;5\}$ va $\vec{b} = \{1;2;1\}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarning vektor ko'paytmasi topilsin.

Javob: $7\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

9. $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini hisoblang.

Javob: 33.

Vektor tushunchasi bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring.

1. Vektorga ta'rif bering.
2. Qanday shartlar bajarilganda vektorlar o'zaro teng bo'ladi?
3. Ikkita va undan ortiq vektorlar berilganda, qanday qoida bo'yicha ularning yig'indisini topasiz?
4. Vektorlarni qo'shishda guruhlash va o'rin almashtirish qonunlarini keltiring.
5. Vektorlarni songa ko'paytirishga ta'rif bering.
6. Vektorning o'qdagı proyeksiyasini chizmada ko'rsating.
7. Bazis deganda nimani tushunasiz?
8. Dekart bazisi nima?
9. Vektorni Dekart bazisi bo'yicha tashkil etuvchilarga yoyishni ko'rsating.
10. Vektorning moduli qanday formula yordamida topiladi?
11. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini tushuntiring.
12. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday formula yordamida topiladi?
13. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulalarini yozing.
14. Vektorlarni skalyar ko'paytirish haqida tushuncha bering.
15. Skalyar ko'paytma qanday shartni qanoatlantirganda ikki vektor ortogonal bo'ladi?
16. Skalyar ko'paytmaning xossalarini keltiring.
17. Skalyar ko'paytma formulasining koordinatalar shaklini yozing.
18. Ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
19. Vektorlarning vektor ko'paytmasini ta'riflang.
20. Vektor ko'paytmaning xossalarini keltiring.
21. Vektor ko'paytmaning koordinatalar shaklini yozing.
22. Vektor ko'paytmaning nolga teng bo'lish shartini yozing.
23. Vektorlarning aralash ko'paytmasini ta'riflang.
24. Aralash ko'paytmaning Dekart bazisi orqali ifodasini yozing.
25. Aralash ko'paytmaning xossalarini keltiring.
26. n o'lchovli vektor va ular ustidagi amallar haqida nimalarni bilasiz?